高階ユニフィケーションにおける可解なクラスと計算の複雑さ(アルゴリズムと計算量の理論)

原尾, 政輝; 岩沼, 宏治

数理解析研究所講究録
731巻 1990年 37-48

高階ユニフィケーションにおける可解なクラスと計算の複雑さ

九州工業大学 情報工学部　原尾　政輝　(Nasateru HARAO)
山形大学 工学部　岩沼　宏治　(Kouji IWANUMA)

ある言語におけるユニフィケーション問題とは、その言語の項の集合 $\{t_1,t_2,...,t_n\}$が与えられたとき、$\sigma(t_1)=\sigma(t_2)=...=\sigma(t_n)$となる置換（ユニファイア）$\sigma$が存在するか判定する問題である。ユニフィケーションは定理証明の機械化や記号処理等と関連して重要である。一般に２階以上の項のユニフィケーション問題は決定不能であるが，本稿ではユニフィケーション問題が可解となるクラスの性質と，２階の強く制限されたクラスでもＮＰ-困難でNP^{NP}に属するものが存在することなどを示す。そして，高階項のユニフィケーションの複雑さの原因の一つが，高階変数によって集合ユニフィケーション問題と同じ組合わせ的様相を取り込んでいるためである事を明らかにする．

２．型付λ式とユニフィケーション

２.１ 型付λ式

λ式に型を導入したものを型付λ式は、常に正規形を持ちセマンティクスも簡潔であり、高階論理の定式化に用いられる。本稿は型付きλ式を用いて定義される有限タイプ理論と呼ばれている言語[1]を基本とする。

【定義 2.1】 基本タイプの有限集合をT_0とするとき、タイプの集合Ｔとは$T_0 \subset T$かつ以下の条件を満たす最小の集合である：$\alpha,\beta\in T$ならば$\alpha\to\beta\in T$.
また､タイプ記号で括弧は右結合的とし,$(\alpha\to(\beta\to\gamma))$を$\alpha\to\beta\to\gamma$と書く□

【定義 2.2】 タイプの階数Odrを帰納的に次のように定義する：
(a) $\alpha\in T_0$に対し、$\mathrm{Odr}(\alpha)=1$.
(b) $\alpha\to\beta\in T$ならば $\mathrm{Odr}(\alpha\to\beta)= \max\{\mathrm{Odr}(\alpha)+1,\mathrm{Odr}(\beta)\}$□
各タイプの変数集合をΔ,定数の集合をΓで表し，それぞれ可算個あるとする．

【定義 2.3】 項の集合Terと項tのタイプ$\tau(t)$を帰納的に次のように定義する：(a) $t \in \Delta \cup \Gamma$ならば$t \in Ter$.

(b) $t_1, t_2 \in Ter$で$\tau(t_1) = (\alpha_1 \to \alpha_2)$, $\tau(t_2) = \alpha_1$ならば、$(t_1\ t_2) \in Ter$で、$\tau((t_1\ t_2)) = \alpha_2$.ここで関数適用は左結合的とする。

(c) $t \in Ter$, $\tau(t) = \alpha_2$ で、 x がタイプ α_1の変数とする。このとき、tの抽象化とは $(\lambda x.t) \in Ter$で、$\tau(\lambda x.t) = (\alpha_1 \to \alpha_2)$である。

以下，Pxy...zをP(x,y,...,z)と書く．また，自由変数、束縛変数，閉式，λ-変換等は通常の定義［例えば(1)］に従うとする。ただし，$\tau(A) = (\alpha \to \beta)$, $\tau(z) = \alpha$で z は A で自由でないならば、A を $\lambda z(Az)$ で置き換える操作をη^*-変換（通常のη-変換の逆）と呼ぶ．Aにおいて自由変数xの出現を全て t で置き換えたものを A[x/t]で表す。 β-変換を用いてこれ以上変換出来ないλ式へ変換したものをβ-正規形と呼ぶ．$t = \lambda x_1 x_2 \ldots x_n . \phi(t_1, t_2, \ldots, t_p)$を$\beta$-正規形で，型$\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n+k} \to \beta$, $\beta \in T_0$, とするとき，$\tau(x_{n+i}) = \alpha_{n+i}, 1 \leqq i \leqq k$,なる新しいk個の変数を加えて$\eta^*$-変換したものを$\eta^*$-正規形とよぶ．$\eta^*$-正規形は一般に$\eta(t) = \lambda x_1 x_2 \ldots x_n\ x_{n+1} \ldots x_{n+k} . \phi(\eta(t_1), \eta(t_2), \ldots, \eta(t_p))$と表される．$\phi$をヘッドと呼ぶ。ヘッド$\phi$は、関数定数または束縛変数のとき確定的(rigid),自由変数のとき不定的(flex)と言う。またその時の項をそれぞれ確定項,不定項と呼ぶ。以下本稿ではη^*-正規形を正規形とよび,λ-項は正規形であるとし，次の記法を用いる：

$$t = \lambda u_1 u_2 \ldots u_n . f(t_1, t_2, \ldots, t_p), \quad r = \lambda v_1 v_2 \ldots v_n . @(r_1, r_2, \ldots, r_q)$$

但し,@は確定的,f は不定的記号を表し，t_i $(1 \leqq i \leqq p)$,r_j $(1 \leqq j \leqq q)$は一般の正規項である。有限回の手数で-正規形へ変換でき，しかもそれは変数の名前替え（α-変換）を除いて一意的である事に注意する。

２．２高階ユニフィケーション

次の形をした置き換えの有限集合σを代入と呼ぶ：$\sigma = \{x_1/u_1, x_2/u_2, \ldots, x_n/u_n\}$．ただし、$\tau(x_1) = \tau(u_1), \ldots, \tau(x_n) = \tau(u_n)$とする．また、項tに代入$\sigma$を施したものを$\sigma(t)$と書き、$[\lambda x_1 x_2 \ldots x_n . t](u_1, u_2, \ldots, u_n)$の正規形として定義する。

【定義2.4】 t_1, t_2を$\tau(t_1) = \tau(t_2)$なる項とする。このとき、$\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$

($\sigma(t_1)=t_2$) なる代入σを t_1,t_2のユニファイア（マッチング）と呼ぶ。

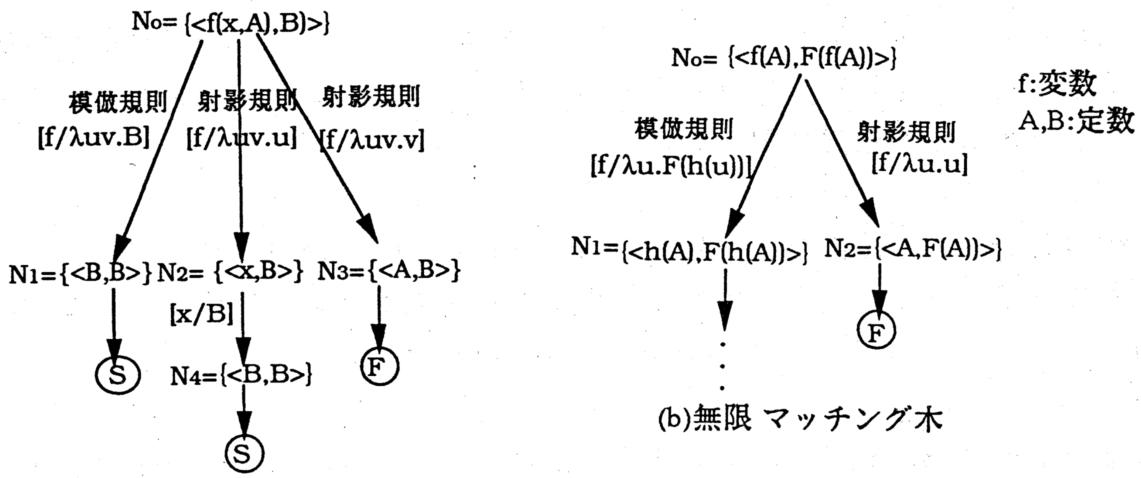
一般にユニフィケーションは，ある演算の下での等価な項を判定する事に相当する[12]．λ項の場合はλ変換の下での等価性判定であり，λ-変換の操作が入るために非常に複雑になる。以下[5]のユニファイアのλ-変換に関する同値類の代表元（正規形）を枚挙する部分アルゴリズムを基に，高階ユニフィケーションの基本的性質を調べる。

【定義2.6】 不一致集合Dとは、$\tau(t)=\tau(r)$となる正規形の順序対 ⟨t，r⟩ の有限集合である。D中の項対で一方が自由項で他方が確定項であるものをflex-rigid 対、両方とも flex 項の場合を flex-flex 対と呼ぶ.

《簡約規則 Simple》 Simple は不一致集合Dを受取り、正規項の対のヘッドが同じであればそれを取り除き、新しい簡約された不一致集合を生成する。
《Match 手順》 Match はDの中の flex-rigid 対を受け取り、次の模倣規則，射影規則を適用し，不定項のヘッドの変数に可能な代入の有限集合を返す。
<u>模倣規則</u>：$\sigma = \{f/\lambda x_1x_2...x_p.@(\underline{h}_1,\underline{h}_2,...,\underline{h}_q)\}$ （fに対して1個存在）
但し,$\underline{h}_i=h_i(x_1,x_2,...,x_p)$, $\tau(hi)=\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_p\rightarrow\gamma_i(1\leqq i\leqq q)$は，t やrには現れない新しい関数である．
<u>射影規則</u>：$\sigma = \{f/\lambda x_1x_2...x_p.x_i(\bar{g}_1,\bar{g}_2,...,\bar{g}_m)\}$（p個存在，pはfのアリティ），但し，$\tau(x_i)=\tau(t_i)=\alpha_i$で,$\bar{g}_j=g_j(x_1,x_2,...,x_p)$ $(1\leqq j\leqq m)$, $\tau(g_j)=\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_p\rightarrow\alpha_{ij}$,はtやrには現れない新しい関数.

一般的ユニフィケーションアルゴリズムは，Simple,Match手順を交互に適用して構成され，それは次のような<u>木</u>で表現出来る：
(1)木の根は、N_0=Simple {⟨t,r⟩}である。
(2)節点NがS(成功)でもF(失敗)でもないなら,Nの要素から任意の１つのflex-rigid対を採り、Match により代入の集合$\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_k\}$を構成する。各$\sigma_i$に対してSimple($\sigma_i$N)を計算し、Nの子節点としてNから$\sigma_i$でラベルを計算し、Nの子節点としてNから$\sigma_i$でラベル付けされたアークを付け加える。
模倣規則は、fのヘッドを@に合わせる操作で１階項のユニフィケーションの一般化に対応し，射影規則はt自身の部分項を取り出し確定項とユニファイ可能な形に変形する操作で高階特有の規則である。図１(a)は有限で成功（S）節点

または失敗（F）節点へ到達するが，図１(b)の例では無限木となる．また、このアルゴリズムは健全，完全かつ非冗長であることが知られている[7]．一般に高階の場合は，最汎ユニファイアが存在するとは限らず，極大な複数のユニファイアが存在する。



(a) 有限マッチング木

(b)無限 マッチング木

図１マッチング木の構成例

３．基本的性質

３.１ 模倣規則（射影規則）によるユニファイア

ユニファイアを模倣規則（射影規則）だけに制限して求める問題を模倣規則（射影規則）によるユニフィケーションと呼ぶ．模倣規則によるユニファイ可能性には次が成立する．

【命題3.1】[3,8]項対＜ｔ，ｒ＞が模倣規則だけを用いてユニファイ可能かどうかは，len(ｔ)+len(ｒ)に関する線形時間で決定可能である．

２階項のクラスのユニフィケーションは射影規則に限ってもＮＰ-完全となることを示す．２階の場合射影規則は，$\sigma=\{f/\lambda x_1x_2\ldots x_p.x_i\}$となることに注意する。

【定義3.1】Ｔ,Ｒ を項の集合とする。代入θに対し$\theta(T)=\{\theta(t)\mid t\in T\}$とする。代入$\theta$がＴとＲをユニファイ（マッチ)可能かどうかを決定する問題を集合ユニファイ(マッチング）問題と呼びＳＵＰ（ＳＭＰ）で表す。

【命題3.1】[9] T,R を高々2階の定数および1階の変数だけからなる1階の項の集合とする。このとき、T,RのSUPおよびSMPはNP-完全である。TとRはその要素数が等しくRは定数だけからなるとした場合のSMPもNP-完全である。☑

SUPは可換，結合，冪等則演算の下でのユニフィケーション問題の特別な場合である[9].SUPがNP完全になる原因は、これらの演算によって集合の要素間のユニファイすべき対の選びかたが組み合わせ的に増えるためである．選び方が組み合わせ的に増えるためである．高階ユニフィケーションにおいては、射影規則により結果的にはこれと等価な処理を考慮せざるを得ない事を示す。

【定理3.1】項t，rを $t=@(h_1(t_1,t_2,...,t_p),...,h_q(t_1,t_2,...,t_p))$，$r=@(r_1,...,r_q)$とする．ここで$h_i(1\leqq i\leqq q)$は2階の変数で$t_i(1\leqq i\leqq p)$，$r_i(1\leqq i\leqq q)$は2階変数を含まない異なる項とする．この時$\langle t,r\rangle$が射影規則のみを用いてユニファイ可能かどうかはNP－完全である．

（証明）【NP】$\langle t,r\rangle$の不一致集合は$D_i=\langle h_i(t_1,t_2,...,t_p),r_i\rangle,(1\leqq i\leqq q)$となる．ここで各$r_i$とマッチさせる2階変数 h_iには,どの射影規則$\rho_j=\lambda x_1x_2...x_p.x_j$ $(j=1,2,...,p)$ を用いるかのp通りがある．即ち，

$\{t_1,t_2,...,t_p\}\Rightarrow r_1,\{t_1,t_2,...,t_p\}\Rightarrow r_2,...\{t_1,t_2,...,t_p\}\Rightarrow r_q$

なる対応が同時に実現出来る事と等価になる．これは$T=\{t_1,t_2,...,t_p\}$，$R=\{r_1,r_2,...,r_q\}$のSUPと等価である．TとRがユニファイ可能であれば，pq個の項対の部分集合でユニファイ可能なものがあるから，それを非決定的に推測する．即ち各$r_i(1\leqq i\leqq q)$に対して$t_{j(i)}$を選ぶ．それらが同時にマッチ可能かどうかは，$\tau_j=\&(t_{j(1)},t_{j(2)},...,t_{j(q)})$，$\pi=\&(r_1,r_2,...,r_q)$とおくとき，あるjについて$\tau_j$と$\pi$がマッチング可能かどうかと等価である．$\tau_j$と$\pi$のマッチング可能性は，$\tau_j$と$\pi$が共に1階の項であるから項の長さに関する線形時間で判定できる[10]．従ってこの問題はNPに属する．

【NP困難】命題3.1の条件を満たす$T=\{t_1,t_2,...,t_p\}$と$R=\{r_1,r_2,...,r_p\}$を用いて，TとRのSMPが項$t=@(h_1(t_1,t_2,...,t_p),...,h_p(t_1,t_2,...,t_p))$と$r=@(r_1,...,r_p)$（p=qとなっていることに注意する）のマッチング問題と等価なことを示す．

(→) $\theta(T)=R$となる代入θが存在するとする。$\theta(t_j)=r_i$のとき、$h_i(w_1,w_2,\cdots,w_p)=w_j$ となるように2階変数h_iに対する射影規則を$\rho_j=\lambda x_1x_2...x_p.x_j$と

定める．これらの射影規則と θ との合成として得られた代入 σ はt,rのマッチングとなる。

($\Leftarrow$) σ (t) ＝rなる代入 σ で，２階変数には射影規則のみを用いるものが存在するとする。$h_i(1\leqq i\leqq p)$に対する射影規則は次の形をしている．

$$\{h_i/\lambda x_1x_2...x_p.x_{j(i)}\} \quad (1\leqq i\leqq p).$$

ただし，jは写像$j:\{1,...,p\}\rightarrow\{1,...,p\}$であり，この代入の結果次の不一致集合が導出される．$D=\{\langle t_{j(1)},r_1\rangle,\langle t_{j(2)},r_2\rangle,...,\langle t_{j(p)},r_p\rangle\}$ .tとrがマッチング可能だから，Dはマッチング可能である．Dのマッチングを θ とすると，$\theta(t_{j(i)})=r_i$で$r_1,r_2,...,r_p$ は互に異なるので $t_{j(1)},t_{j(2)},...,t_{j(p)}$ は互に異なる．即ち，jは全単射で$\{t_{j(1)},t_{j(2)},...,t_{j(p)}\}=\{t_1,t_2,...,t_p\}$ となり，DのマッチングはTとRのマッチング問題に帰着される．tとrのマッチングから導かれるjと θ の下では $\theta(T)=R$であり，SMPは解を持つ。$\boxed{\leftarrow}$

例3.1 $t=@(h_1(A(x),B),h_2(A(x),B))$,
$r=@(A(B),B)$
とする．このとき不一致集合Dは
$D=\{\langle h_1(A(x),B),A(B)\rangle,\langle h_2(A(x),B),B\rangle\}$となる．これは$T=\{h_1(A(x),B),A(B)\}$,$R=\{h_2(A(x),B),B\}$ のSMPと同値になる．$\langle A(x),A(B)\rangle,\langle B,B\rangle$となるマッチ対を推測する．図2で示すように，$h_1/\rho_1,h_2/\rho_2$を適用し $\theta=\{x/B\}$とすればtとrのマッチングが得られる．

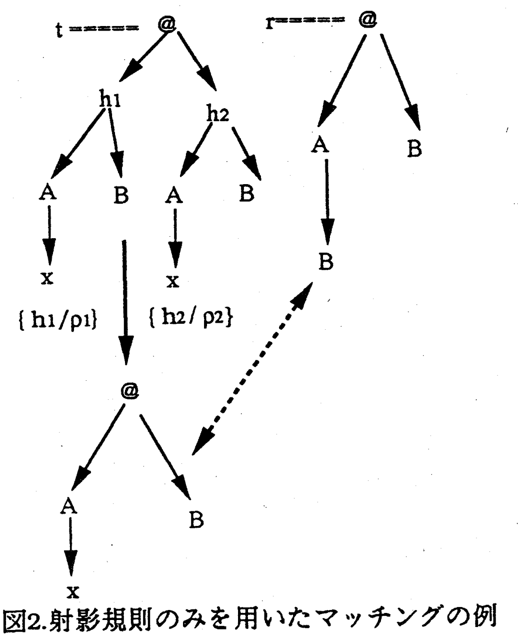


図2.射影規則のみを用いたマッチングの例

【系3.1】定理3.1において，すべての記号のアリティがc（定数）以下であれば，その射影規則によるユニフィケーション問題は$n=len(t)+len(r)$に関する多項式時間で判定可能である。

(略証)命題3.4の証明におけるp，qはすべてcで押えられることを用いる.$\boxed{\leftarrow}$

【定理3.2】tをただ１種の２階の変数fを（k個）持つ項$t=@(f(t_1,t_2,...,t_p),f(u_1,u_2,...,u_p)...,f(v_1,v_2,...,v_p))$,rを項$r=@(r_1,r_2...,r_q)$と

する．ここで$t_i, u_i, ..., v_i (1 \leqq i \leqq p)$および$r_i (1 \leqq i \leqq q)$は２階変数を含まない項とする．このとき$\langle t, r \rangle$が射影規則のみを用いてユニファイ可能かどうかは$n = len(t) + len(r)$に関する多項式時間で決定出来る．$\boxed{}$

４．ＮＰ-困難なクラス

実用上重要なクラスとして２階のクラスがある．特に，項対の片方が２階の変数を含まないマッチング問題は可解である事が知られており[5]，メタプログラミングなどを始めとして有用なクラスである。本章では、模倣規則と射影規則両方を用いれば，単純な構文に制限した２階のクラスのユニフィケーション問題でもＮＰ-困難になる事を示す。項ｔを唯一種の２階の関数変数ｆを持ち、複数のｆを含んでも良いがｆをヘッドとする部分項にはｆは現れない項とし、ｒを２階以下の定数だけからなる１階の項とする。このような項対を２階単種-定数項対と呼ぶ．

【定理4.1】 ２階単種-定数項対に対するユニフィケーション問題はＮＰ-困難である。$\boxed{}$

（証明）命題3.3の条件を満たす項の集合を、$T = \{t_1, t_2, ..., t_p\}$, $R = \{r_1, r_2, ..., r_p\}$とする。$t_i, r_i$のタイプはすべて$\alpha$であり，$i \neq j$ならば$t_i \neq t_j, r_i \neq r_j$と仮定する。また、Ｔ,Ｒに現れない次の新しい変数と定数を考える。

２階のｍ項変数：f，$\tau(f) = \alpha \to \cdots \to \alpha \to \alpha$；２階の２項関数定数：＃；

２階のｍ項関数定数：@；　　　　　　　　１階の定数記号：ｄ

このとき、項t, rを次のように定義する：

$t = \#(f(t_1, t_2, \cdots, t_p), f(d, \cdots, d)), r = \#(@(r_1, r_2, \cdots, r_p), @(d, \cdots, d))$

$\langle t, r \rangle$は２階単種一定数項対になっている．まず自由変数ｆに射影規則を用いたのでは，２番目の項対ではｄが取り出され，ヘッド@と一致するようには出来ないので，マッチング不可能である．だから、最初の代入は模倣規則に限らである．だから、最初の代入は模倣規則に限られる。ここで模倣規則を適用すると不一致集合は次の様になる（図３参照）：

$\{\langle h_1(t_1, t_2, \cdots, t_p), r_1 \rangle, \cdots, \langle h_p(t_1, t_2, \cdots, t_p), r_p \rangle, \langle h_1(d, \cdots, d), d \rangle, \cdots, \langle h_p(d, \cdots, d), d \rangle\}$．これ以降、$h_1, ..., h_p$に対する代入は、模倣規則ではありえない。従って、$h_i (1 \leqq i \leqq p)$に対しては射影規則を適用しなければならない。$\langle h_i(d, ..., d), d \rangle$は任意の射影規則のもとで成功するから，このマッチング問

題は$\{\langle h_1(t_1,t_2,...,t_p),r_1\rangle,\cdots,\langle h_p(t_1,t_2,..., t_p),r_p\rangle\}$の射影規則のみを用いた定理3.1と等価になる．従って，ＮＰ困難である．□

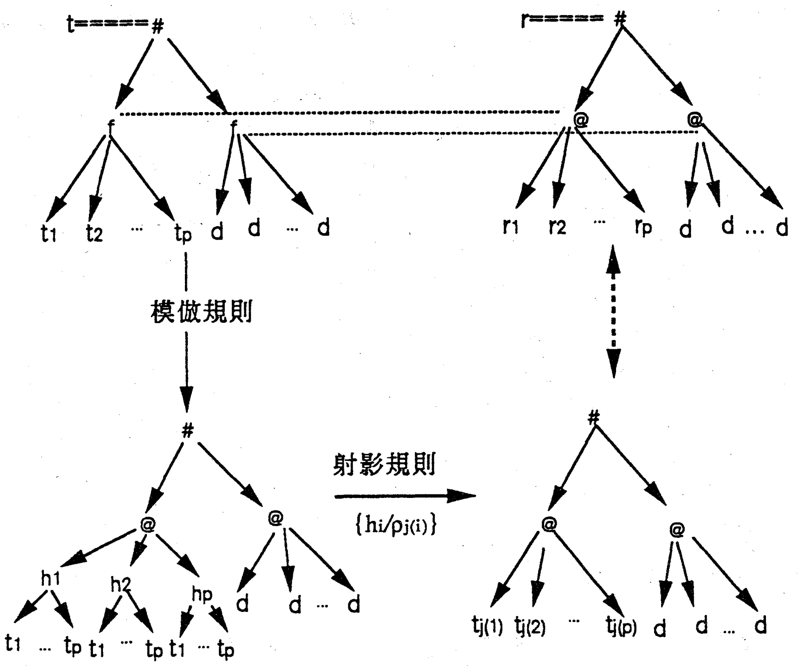
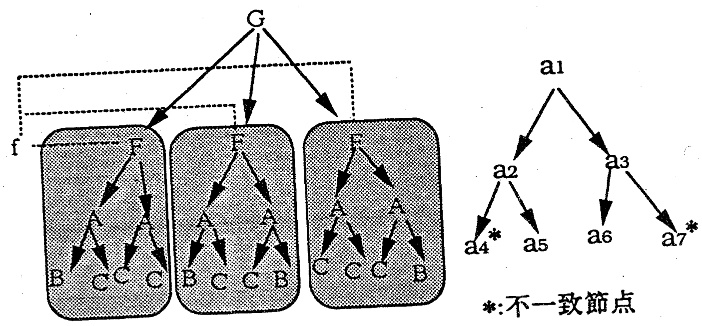


図3.定理4.1の証明の概要

Ｐ$_1$，Ｐ$_2$を問題のクラスとするとき，任意のｐ$_1\in$Ｐ$_1$とあるｐ$_2\in$Ｐ$_2$に対して非決定性ＴＭが存在して多項式時間で帰着可能なときＰ$_1\leqq_\gamma$Ｐ$_2$と書く．クラスＮＰ^{Y}をＮＰ^Y＝｛Ｐ｜Ｐ’$\in$Ｙ，Ｐ$\leqq_\gamma$Ｐ’｝と定義する．ＮＰ^{Y}はＹを神託（オラクル）として持つＮＤＴＭで多項式で決定可能なクラスである．次に２階単種-定数項対のマッチング問題はＮＰ^{NP}である事を示す。

２階単種一定数項対＜ｔ，ｒ＞で，ｔの２階変数ｆとマッチングすべき部分項を一致項と呼ぶ．一致項の構文木をつくり，その異なる記号に対応する節点を不一致節点とよぶ．構文木で不一致節点の子孫を切り離してできた構文木は各一致項に対して同じ形をしており，その木の各節点に改めて共通のラベル $a_1,a_2,...$をつけたものを一致木と呼ぶ。



(a)依存グラフ　(b)一致木

図4.不一致節点と一致木の例

例4.1２階単種一定数項対<G(f(A(x),C),f(A(B),A(C)),f(A(y),z)), G(F(A(B,C),A(C,C)),F(A(B,C),A(C,B),F(A(C,C),A(C,B))>に対する一致木の構成を図４に示す．ここで＊印のついた節点が不一致節点である．

NP^{NP}性判定アルゴリズムは，まず模倣規則，射影規則を適用する２階変数集合を非決定的に選ぶ．この手順は，一致木の各節点に対応する２階変数に，模倣規則と射影規則のどちらを適用するかを推測する事に対応する．一致木の節点の部分集合で，各不一致節点に対して，その不一致節点かあるいはその祖先のうちの一つを含むものを不一致節点カバー集合と呼ぶ．例では｛a_3，a_4｝は不一致節点カバー集合になっているが，｛a_3，a_5｝はそうではない．

【補題4.1】 一致木が不一致節点を持つとする。このとき、マッチング可能であるための必要十分条件は、ある不一致節点カバー集合が存在し，その節点に対応する２階変数に同時に射影規則を適用してマッチング可能な事である。$\square$

推測された節点集合に対して，模倣規則の適用箇所については，一致木の対応する部分が全く同じになっているかどうかを調べれば良いから，線形時間でマッチング可能性は判定出来る．また，この手順が成功すると言う事は，模倣規則を適用する部分には不一致節点は含まれていない（補題4.1の条件，不一致節点カバー集合の条件を満たしている）事も同時に検査している事に注意する．ついで射影規則適用箇所について検査する．不一致節点カバー集合に至るまでの２階変数には模倣規則を適用し，不一致節点カバー集合に対応する２階変数には射影規則を適用するものとする．最初に図５(a)のような依存関係があるとき，全ての変数 f に模倣規則 $\sigma=\{f/\lambda x_1x_2...x_p.@(\underline{h}_1,\underline{h}_2,...,\underline{h}_q)\}$ を同時に適用すると $\sigma(f(\underline{t}))=@(h_1(\underline{t}),...,h_q(\underline{t}))$, $\sigma(f(\underline{u}))=@(h_1(\underline{u}),...,h_q(\underline{u}))$, ..., $\sigma(f(\underline{v}))=@(h_1(\underline{v}),...,h_q(\underline{v}))$ ，なる依存関係を得る．但し，$\underline{t}=(t_1,t_2,...,t_p)$, $\underline{u}=(u_1,u_2,...,u_p)$, ..., $\underline{v}=(v_1,v_2,...,v_p)$とする．不一致節点カバー集合に至るまで模倣規則を適用して行くと，図５(b)のような対応関係が得られる．ここで新たに用いられる２階変数｛h_1，h_2,…,h_m｝は f と同じタイプを持ち f と基本的には変らない事に注意する．即ち，新しい不一致集合として次が得られる：

$$D(\alpha)=\{\langle h_j(t_1,t_2,\cdots,t_p),\alpha_j\rangle \mid (1\leqq j\leqq m)\}$$
$$D(\beta)=\{\langle h_j(u_1,u_2,\cdots,u_p),\beta_j\rangle \mid (1\leqq j\leqq m)\}$$
$$\cdots$$
$$D(\gamma)=\{\langle h_j(v_1,v_2,\cdots,v_p),\gamma_j\rangle \mid (1\leqq j\leqq m)\}$$

ただし，α_j, β_j, ..., γ_jはα，β，...，γの節点a_jをヘッドとする部分木（部分

項）とする。不一致節点カバー集合の各要素a_j(変数h_j)に射影規則｛$h_j/\lambda x_1 x_2 \ldots x_p . x_i$｝(i=1,2,...,p)を適用するとi成分{$t_i, u_i, \ldots, v_i$}が取り出され，新たに次の依存関係が出てくる：

$$D_{ji}=\{\langle t_i,\alpha_j\rangle,\langle u_i,\beta_j\rangle,\ldots,\langle v_i,\gamma_j\rangle\},(i=1,2,\ldots,p)$$

このことは，不一致節点カバー集合に属する全ての要素a_j(変数h_j)に対してある射影規則ρ_i（$1 \leqq i \leqq p$）が存在し$\bigcup$｛D_{ji}｝は同時にマッチング可能でなければならないことを意味する。$\pi_j = \&(\alpha_j, \beta_j, \ldots, \gamma_j), (j=1,2,\ldots,m)$, $\tau_i = \&(t_i, u_i, \ldots, v_i), (i=1,2,\ldots,p)$，と定義すると，$\pi_j$と$\tau_i$がマッチング可能なこととD$_{ji}$がマッチング可能な事とは等価である．タイプの条件を満たす新しい定数\$を用いて $term_1=\$(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_m)$, $term_2=\$(h_1(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_p), \cdots, h_m(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_p))$とおく（図５(c)）とつぎの結果が得られる．

【補題 4.2】 不一致節点カバー集合に対応する変数節点 $h_1, h_2, \ldots, h_m$ において射影規則を用いてマッチング可能なための必要十分条件は，$\langle term_1, term_2 \rangle$が射影規則を用いてマッチング可能な事である。□

【補題4.3】 ２階単種－定数項対$\langle t, r \rangle$において，不一致節点カバー集合の要素の数をｍ，ｆのアリティをｐ，ｎ＝len(ｔ)＋len(ｒ)とする．$len(term_1)+len(term_2)=O(n^2)$である．□

【定理4.2】 ２階単種-定数項対$\langle t, r \rangle$のマッチング問題で，不一致節点カバー集合に対する２階変数に射影規則を適用してマッチング可能かどうかはＮＰ-完全である．

(証明)補題4.2によりこの問題は$\langle term_1, term_2 \rangle$の射影規則によるマッチング可能性に帰着される．従って，定理3.1,補題4.3よりＮＰ-完全である．□

【定理4.3】 ２階単種-定数マッチング問題はNP^{NP}である。□

【系4.1】 定理4.3において，すべての記号のアリティがｃ（定数）以下であれば，階単種-定数マッチング問題はＮＰ-完全となる．□

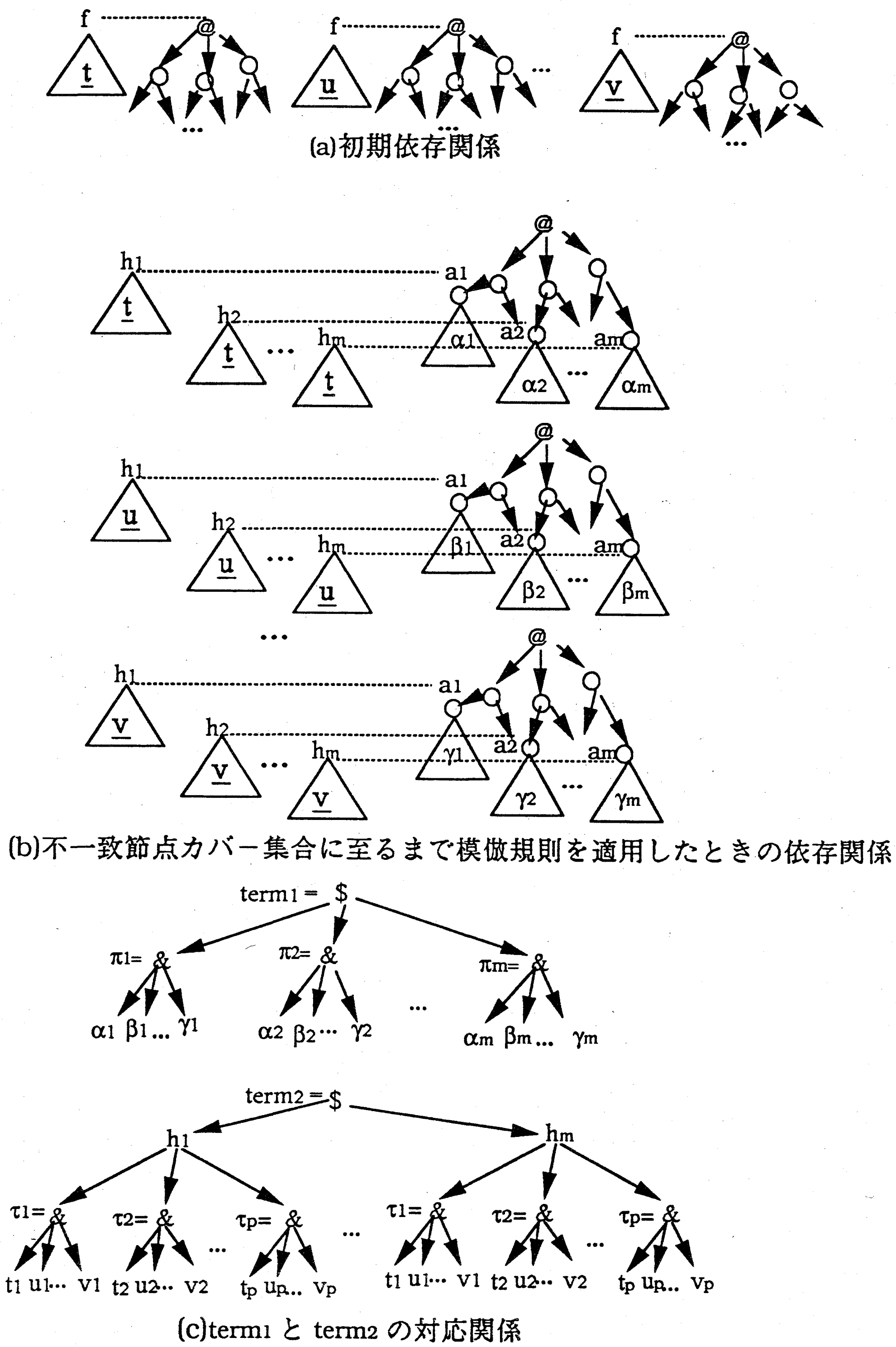


図５模倣規則の適用と依存関係の変化

５．むすび

本稿では、高階論理を型付λ式を用いて定式化し、高階の場合のユニフィケーション問題をアルゴリズム論的立場から考察した。特に２階のλ項に制限し

たマッチングでもＮＰ-hardとなる事が分かった。しかし、高階のクラスの有用性を保ちながらより効率的なユニフィケーションを実現するには,(１)高階変数の階数やアリティに適当な制限を加える,(２)高階変数の出現方法の制限（ネストの禁止，複数回出現の禁止）などが有効な事が分った．この様に、用法や構文に適当な制限を付ける事によって、論理型言語に取り込む事が可能と思われる。現在一般的ユニフィケーションアルゴリズムを論理型言語 Prolog を用いて実装している。今後は，本稿の考察の結果を踏まえて改良して行く予定である．

謝辞：この研究は一部１９９０年度文部省科研費一般（C）01580020の援助の下に行われたものです．

文献[1]P.B.Andrew:An Introduction to Mathematical Logic and Type Theory,Academic Press.Inc,1986.

[2]W.D.Goldfarb:The Undecidability of The Second-Order Unification Problem, TCS,Vol.13,1981,pp.225～230.

[3]原尾,岩沼：高階論理におけるユニフィケーションの複雑さ：情報処理学会研究会，AL 5-5,1989,pp33～40.

[4]L.Henkin:Completeness in the Theory of Types,JSL,Vol.15,1946,81～91.

[5]G.Huet and B.Lang: Proving and Applying Program Transformations Expressed with Second-Order Patterns,Acta Informatica,11,1978, pp31～55.

[6]G.Huet:A Mechaniztion of Type Theory,Proc.of3rd IJCAI,1973,139～146.

[7]G.P.Huet:A Unification Algorithm for typed λ-calculus,TCS,Vol.1, 1975,pp27～57.

[8]岩沼,原尾：高階論理におけるユニフィケーションについて,信情学技報 COMP87-27, 1987,pp13～20.

[9]D.Kapur,P.Narendran: NP-Completeness ofThe SetUnification and Matching Problems, LNCS.230,1986,pp.489～ 495.

[10]M.S.Paterson,M.Wegman: Linear Unification,JCSS 16,1978,pp.158～167.

[11]J.H.Siekmann:Universal Unification,LNCS,No.170,1984,pp1～42.